

Otimização no Octave

Minicurso de Economia e Estatística Computacionais

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Semana Acadêmica da Economia 2012

Ronald Otto Hillbrecht

Fabício Tourrucão

Rodrigo Nobre Fernandez

1 Motivação

2 Instalação do Software

O que é o Octave?

Instalação

3 Otimização

Minimizar Custos

Maximizar Lucros

Modelo de Markowitz

Programação Linear

- Problemas de otimização em economia e finanças;
- O Octave é um software gratuito e uma boa alternativa ao MATLAB;

1 Motivação

2 Instalação do Software

O que é o Octave?

Instalação

3 Otimização

Minimizar Custos

Maximizar Lucros

Modelo de Markowitz

Programação Linear

O que é o Octave?

- O GNU Octave é uma linguagem de programação de alto nível destinada principalmente para cálculos numéricos. Esta ferramenta fornece a capacidade de solução de problemas lineares e não lineares. O software é gratuito e possui uma linguagem bastante semelhante ao MATLAB, sendo considerado uma possível alternativa para esse. Além disso, o aplicativo pode trabalhar em conjunto com o Dynare, o que permite estimar modelos DSGE (Equilíbrio Geral Dinâmico e Estocástico) e de OLG (Gerações Sobrepostas).

1 Motivação

2 Instalação do Software

O que é o Octave?

Instalação

3 Otimização

Minimizar Custos

Maximizar Lucros

Modelo de Markowitz

Programação Linear

- Você precisará baixar o arquivo Octave3.6.1_gcc4.6.2_20120303.7z do site <http://sourceforge.net/projects/octave/files/> e descompactá-lo numa pasta qualquer.
- Utilizaremos o 7-zip;
- Após a instalação do software, adicionaremos os pacotes convenientes;

- No nosso caso, instalaremos o struct, miscellaneous, optim e o econometrics;
- Seguiremos esta ordem, devido a estrutura de dependência entre eles. Você pode conferir esta informação no site do pacote, vejamos o exemplo do optim : <http://octave.sourceforge.net/optim/index.html>
- Após conferir, esta informação vamos no diretório que instalamos o software e entraremos na pasta bin executando o arquivo octave.exe.
- Num primeiro momento, teremos uma tela do “ms-dos” mas em breve tornaremos o ambiente mais amigável.

- Baixaremos os pacotes desejados do mesmo endereço que fizemos a instalação do programa.
- Em seguida, moveremos estes pacotes para a um diretório dentro da pasta raiz do programa.
- Com o Octave em execução procuraremos este diretório usando os comandos *ls* e *dir*;
- Ao encontrarmos devemos digitar o seguinte comando: *pkg install nome_do_pacote.tar.gz*
- Feita a instalação dos pacotes digitaremos o seguinte: `pkg rebuild -auto`;

- Agora vamos instalar o GUI que é uma interface gráfica que torna a aparência do software bastante amigável e bem semelhante a do MATLAB;
- Feita a instalação, precisaremos definir o diretório onde instalamos o executável do octave e também definiremos o nosso diretórios de consulta de arquivos (path);

1 Motivação

2 Instalação do Software

O que é o Octave?

Instalação

3 Otimização

Minimizar Custos

Maximizar Lucros

Modelo de Markowitz

Programação Linear

- Desejamos encontrar o máximo ou mínimo de alguma função sem restrições.
- Exemplo: Custo Total, Lucro, Produção etc.
- Minimizar a seguinte função: $c(\vec{q}) = a + bq_1^2 + cq_2^3$

- Usaremos a função *fminsearch*
- Os parâmetros para a execução são os seguintes: $[x,xval] = \text{fminsearch}(\text{função}, [\text{palpite}]);$
- Criaremos um arquivo a parte com uma função denominada *fct*
- Podemos fazer isso diretamente no Octave.
- Em seguida, acharemos o mínimo da função $\text{banana}(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$

1 Motivação

2 Instalação do Software

O que é o Octave?

Instalação

3 Otimização

Minimizar Custos

Maximizar Lucros

Modelo de Markowitz

Programação Linear

- Usaremos novamente a função *fminsearch*
- Lembre que $-min = max$, desta forma devemos inverter o sinal da nossa função
- Criaremos um arquivo a parte com uma função denominada *fl*
- $f(q) = q(p - aq)$
- Qual o valor do lucro máximo?
- Agora, vamos maximizar a função de utilidade $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$

1 Motivação

2 Instalação do Software

O que é o Octave?

Instalação

3 Otimização

Minimizar Custos

Maximizar Lucros

Modelo de Markowitz

Programação Linear

- Como vimos anteriormente modelo de Markowitz (1952), considera a média e a variância do portfólio, maximizando a média e minimizando a variância.
- A partir daqui seguiremos a exposição de Kendrick, Mercado e Amman (2005).

- $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e um vetor das médias dos retornos das ações deste

portfólio $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}$

- Para obtermos o retorno médio do portfólio faremos o produto interno destes vetores:

$$\mu'x = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- A variância do portfólio é dada pela matriz de variância-covariância Σ :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

- Onde: σ_{ij} é a covariância dos retorno i e j

- Podemos escrever a a variância do portfólio da seguinte forma:

$$x' \Sigma x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- Usando os componentes da média e da variância do portfólio podemos escrever a função critério do portfólio da seguinte forma:

$$J = \mu' x - \frac{1}{2} \beta x' \Sigma x$$

- onde:
- J = Função Critério;
- β = Peso subjetivo da variância do retorno sobre o portfólio

- Em suma desejamos obter os elementos do vetor x (x_i) que maximizam a função critério sujeita a seguintes restrições:

$$\underset{x}{Max} J = \mu'x - \frac{1}{2}\beta x'\Sigma x$$

ou

$$\underset{x}{Min} J = \frac{1}{2}\beta x'\Sigma x$$

- Utilizaremos as funções minimize e qp(*programação quadrática*) para solucionar este exemplo;

1 Motivação

2 Instalação do Software

O que é o Octave?

Instalação

3 Otimização

Minimizar Custos

Maximizar Lucros

Modelo de Markowitz

Programação Linear

- Este exemplo segue Souza e Gomes Júnior (2004).
- A empresa Alpha deve produzir 1000 automóveis Alfa. A empresa tem quatro fábricas. Devido a diferenças na mão de obra e avanços tecnológicos, as plantas diferem no custo de produção unitário de cada carro. Elas também utilizam diferentes quantidades de matéria-prima e mão de obra. O custo de operação, o tempo necessário de mão de obra e o custo de matéria-prima para produzir uma unidade de cada carro em cada uma das fábricas estão evidenciados a seguir.

Tabela: Custos de Produção Alpha Inc.

Fábrica	Custo Unitário	Mão De obra	Matéria Prima
1	15	2	3
2	10	3	4
3	9	4	5
4	7	5	6

- Um acordo trabalhista requer que a fábrica 3 produza pelo menos 250 carros.
- Existem 3200 horas de mão de obra e 4000 unidades de material que podem ser alocados em quatro fábricas.

- Formalmente nosso problema pode ser apresentado do seguinte modo:

$$\begin{array}{rcll}
 \min & 15x_1 & + & 10x_2 & + & 9x_3 & + & 7x_4 & & \\
 \text{s.a} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & \leq & 3200 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & \leq & 4000 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1000 \\
 & & & & & x_3 & & & \geq & 250 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
 \end{array}$$

- Para solucionar este problema utilizaremos a função *linprog* e *glpk*.