

SELEÇÃO DE CARTEIRAS ATRAVÉS DO MODELO DE MARKOWITZ PARA PEQUENOS INVESTIDORES (COM O USO DE PLANILHAS ELETRÔNICAS).

Cleber Gonçalves Junior

Mestrando Engenharia de Produção – EFEI
clebergoncalves@hotmail.com

Edson de Oliveira Pamplona

Prof. Dr. Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Av. Bps, nº 1303 - Pinheirinho
Itajubá - MG CEP: 37500-000

José Arnaldo Barra Montevechi

Prof. Dr. Escola Federal de Engenharia de Itajubá - EFEI
Av. Bps, nº 1303 - Pinheirinho
Itajubá - MG CEP: 37500-000

ABSTRACT

The application of optimization tools in the investment area can be very useful. As will be seen, the operational research can be helpful in portfolio optimization when it is necessary to reduce the risk keeping a desirable rate of return. To make this optimization process easier even for small investors, this work shows a simple method using spreadsheet that can resolve portfolio optimization problems easily. The model to be used is based on the Markowitz theory that was developed in 1952.

Key Words: Portfolio Selection, Small Investors, and Optimization.

Gestão Econômica – Análise de Investimentos

1- INTRODUÇÃO

Segundo Harry Markowitz (1952), o processo de seleção de uma carteira de ações pode ser dividido em dois estágios. O primeiro começa com observação e experiência e termina com opiniões sobre a performance futura dos negócios avaliados. O segundo estágio começa com as opiniões relevantes sobre o futuro e termina com a escolha de uma carteira de ações. Este trabalho é baseado no segundo estágio.

Um investidor que esteja no mercado de ações, opções ou obrigações deve, ou pelo menos deveria, buscar o máximo retorno possível de seu investimento, dentro de níveis de risco aceitáveis. Isso parece lógico, já que risco e retorno, em geral, possuem uma correlação positiva entre si, quando um aumenta, o outro aumenta junto, quanto maior for o retorno, maior será o risco e vice-versa. Porém essa relação entre risco e retorno pode ser trabalhada de forma que se consiga, através da diversificação, reduzir o risco de uma carteira a níveis algumas vezes menores que o risco do investimento mais seguro que participa da carteira, dependendo da correlação entre os componentes da carteira. Como será visto neste trabalho, pode-se através da diversificação do investimento, ou seja, composição de uma carteira de investimento, aumentar o retorno esperado mantendo o risco a níveis iguais ou menores que o risco individual de cada ativo.

Tanto os conceitos de seleção de carteira propostos por Markowitz quanto os conceitos de pesquisa operacional que serão utilizados neste trabalho já estão sendo utilizados há algum tempo. O diferencial que pode ser observado neste artigo é a união através de planilha eletrônica dos modelos de Markowitz e dos métodos de solução de um problema de programação linear, apresentando de forma simples o processo de otimização na seleção de carteiras, possibilitando que mesmo os usuários pouco familiarizados com estes conceitos sejam capazes de aplicar a PL na seleção de carteiras de investimento.

2- O RISCO

Segundo Bernstein (1997) estudos sérios a respeito do risco começaram no Renascimento, quando as pessoas se libertaram das restrições do passado e desafiaram abertamente as crenças consagradas. Desde então muito tem se desenvolvido nessa área. Passando por Markowitz (1952) que definiu o risco na área financeira como sendo a variância ou o desvio em relação a uma média, depois por Sharpe (1964) que apresentou os conceitos do hoje conhecido CAPM (*Capital Asset Pricing Model*), onde o risco de um ativo para um investidor é o risco que este ativo acrescenta à carteira de mercado. Tanto Markowitz como Sharpe publicaram trabalhos que contribuíram imensamente com a teoria financeira, isso foi reconhecido com o prêmio Nobel que lhes foi atribuído.

Atualmente, o conceito de risco é utilizado diariamente na maioria das operações financeiras. Um operador de Bolsa trabalha com esse conceito durante várias horas por dia, grandes empresas utilizam o risco para avaliar seus investimentos e até mesmo as pequenas lojas de varejo utilizam a idéia do risco para calcular prestações, neste último caso é muito comum o conceito de risco de inadimplência.

Uma definição simples de risco dada por Weston e Brigham (2000) é a que considera o risco como uma possibilidade de que algum acontecimento desfavorável venha a ocorrer, um perigo. O risco de um investimento esta ligado a probabilidade de se ganhar menos que o esperado.

O risco, no mercado financeiro, pode ser conceitualmente dividido em dois tipos básicos segundo Damodaran (1996), o risco diversificável e o risco não diversificável. O primeiro refere-se aos riscos que afetam um número pequeno de empresas, ou seja, se algo der errado apenas uma ou poucas empresas serão afetadas. Por exemplo, suponha que uma certa empresa invista em um projeto que foi previsto como viável e no decorrer do tempo verifica-se que na verdade o projeto está sendo inviável financeiramente, provavelmente isso afetará o valor desta empresa, mas certamente não afetará um número significativo de outras empresas. O segundo tipo de risco, o não diversificável é o mais preocupante, pois refere-se a acontecimentos que afetam o mercado como um todo, como por exemplo a diminuição da taxa base de juros, certamente todo o mercado será afetado com esta decisão.

È importante ressaltar que a diversificação reduz apenas o risco diversificável, como o próprio nome diz. Isso se deve ao fato de que quando se diversifica um investimento, o capital total pode sofrer baixa relativa a acontecimentos que afetam apenas um dos ativos que compõe a carteira, neste caso os outros ativos podem reduzir as perdas totais, porém o mesmo pode acontecer quando uma boa notícia afeta positivamente o valor de somente um ativo, os outros, não sendo afetados, impedirão que os ganhos aumentem na mesma proporção que aumentarão para o ativo que foi afetado pela boa notícia. Assim, a Programação Linear pode auxiliar na redução apenas do risco diversificável, antecipando que provavelmente não se conseguirá reduzir o risco à zero, por existir ainda o risco não diversificável ou como também é conhecido, risco de mercado.

3- SELEÇÃO DE CARTEIRAS

Seleção de carteiras é o estudo de como se pode investir um patrimônio. É um processo para compensar o risco e o retorno esperado para encontrar a melhor carteira de ativos e passivos. (Zvi Bodie, 1999)

O risco que uma pessoa está disposta a assumir pode variar muito dependendo de fatores como idade, nível social, estado civil, número de filhos, perspectivas futuras e vários outros fatores. Deste modo nunca existirá uma carteira de ações que agrade a todos, já que quanto maior o retorno desejado maior será o risco a se assumir.

A composição de uma carteira pode variar muito devido ao fato de existirem diferentes tipos de investidores que desejam assumir diferentes riscos e retornos.

Markowitz (1952) e Sharpe (1964) contribuíram imensamente com o processo de seleção de carteiras de investimentos. Ambos desenvolveram metodologias de avaliação e compensação do risco através da diversificação de investimentos. As teorias desenvolvidas por eles são amplamente utilizadas nos dias hoje, ambos demonstraram matematicamente que não se deve carregar todos os ovos na mesma cesta.

3.1- Combinando o ativo sem risco e um único ativo de risco

Em primeiro lugar deve-se definir o que é um ativo sem risco. Ativo sem risco segundo Zvi Bodi (1999) refere-se a um ativo que oferece uma taxa de retorno previsível ao longo da duração do horizonte de transação, isto é, o horizonte de decisão mais curto possível. Se por exemplo tomar-se o dólar americano como unidade de conta no horizonte de transação em um dia, a taxa sem risco é a taxa de juros dos títulos do Tesouro com vencimento no dia seguinte.

Supondo que se tenha uma quantia (X) de dinheiro para investir no ativo sem risco (A_f) com retorno (R_f) e no ativo com risco (A_r) com retorno ($R_r > R_f$) e desvio-padrão (σ_r). Quanto deverá ser investido em cada ativo?

Observe que se for tomada a decisão de se investir 100% do principal no ativo sem risco, o retorno será de (R_f) e o desvio-padrão será zero. Porém se for investido todo o principal no ativo de risco, o retorno será de (R_r) e o desvio-padrão será (σ_r). Assim, o retorno esperado de qualquer composição de carteira estará em algum ponto da figura 1.

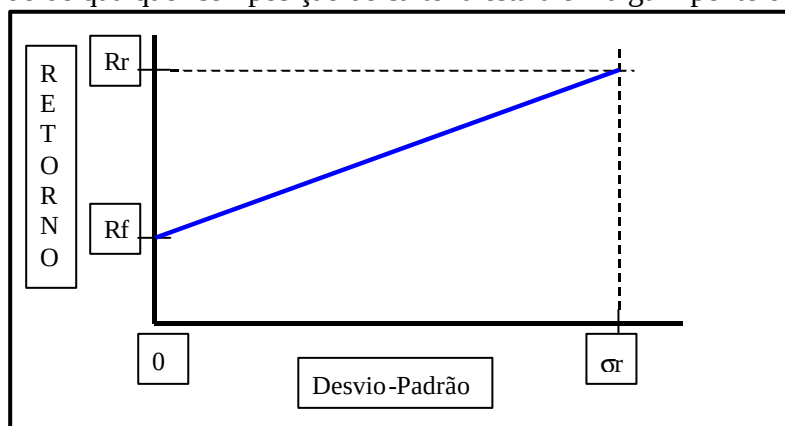


Figura 01 – Linha de compensação Risco/Retorno

Supondo que se aplique 100% no ativo sem risco, o investimento estará no ponto de cruzamento (R_f) e zero. À medida que se desloca o dinheiro para o ativo com risco, o retorno aumenta, porém o desvio-padrão também, até que se chegue ao ponto de 100% de investimento no ativo com risco.

Considerando-se (w) a proporção do investimento total a ser alocada ao ativo com risco, a proporção remanescente ($1 - w$) deverá ser alocada ao ativo sem risco, como mostrado na equação 1:

$$E(r) = w * R_r + (1 - w) * R_f \quad (01)$$

Onde $E(r)$ é o retorno esperado da composição.

O desvio padrão da carteira pode ser encontrado multiplicando-se o desvio padrão do ativo com risco vezes a composição deste na carteira, ou seja:

$$s = s_r w \quad (02)$$

4- MODELO DE MARKOWITZ

Como pode-se calcular o retorno esperado e a variância de uma carteira de ações? Harry Markowitz (1952) desenvolveu um método que registra a variância de uma carteira como a soma das variâncias individuais de cada ação e covariâncias entre pares de ações da carteira, de acordo como o peso de cada ação na carteira. Markowitz comenta que deve haver uma carteira de ações que maximiza o retorno esperado e minimiza a variância, e está deve ser a carteira recomendada para um investidor.

O modelo básico de Markowitz pode ser dado por:

$$E = \sum_{i=1}^n X_i \mu_i \quad (03)$$

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j s_{ij} \quad (04)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1 \quad (05)$$

$$X_i \geq 0$$

Onde:

E : Retorno esperado da carteira;

V : Variância da carteira;

X_i : Participação de cada ativo;

μ_i : Retorno esperado de cada ativo;

σ_{ij} : Covariância entre o par de ativos se (i) diferente (j) e variância se (i) igual a (j);

Segundo Bernstein (1997) o objetivo de Markowitz foi utilizar a noção de risco para compor carteiras para investidores que consideram o retorno esperado algo desejável e a variância do retorno algo indesejável. O que parece bem lógico e sensato para a grande maioria dos investidores. O modelo mostra que enquanto o retorno de uma carteira diversificada equivale à média ponderada dos retornos de seus componentes individuais, sua volatilidade será inferior à volatilidade média de seus componentes individuais. Mostrando que a diversificação é uma espécie de dádiva (Bernstein 1997).

Como pode ser observado nas fórmulas 03 e 04, embora o retorno esperado de uma carteira seja a média ponderada dos retornos individuais, o mesmo não pode ser dito para a variância ou risco da carteira. De acordo com o modelo de Markowitz a variância da carteira depende da covariância entre os pares de ativos, a qual por sua vez depende da correlação entre os ativos. Assim, quando dois ou mais ativos pouco relacionados compõem uma carteira de investimentos consegue-se um risco menor que a média

ponderada dos riscos individuais, conseguindo algumas vezes um risco menor que o do ativo de menor risco com um retorno maior que o deste ativo. Abaixo pode-se observar a figura 01 que apresenta a chamada fronteira eficiente, que mostra o risco e o retorno para as diversas composições possíveis entre dois ou mais ativos. Para facilitar o entendimento a figura 01 representa uma composição entre dois ativos. Observa-se que quanto menor a correlação entre os dois ativos, menor é o risco da carteira.

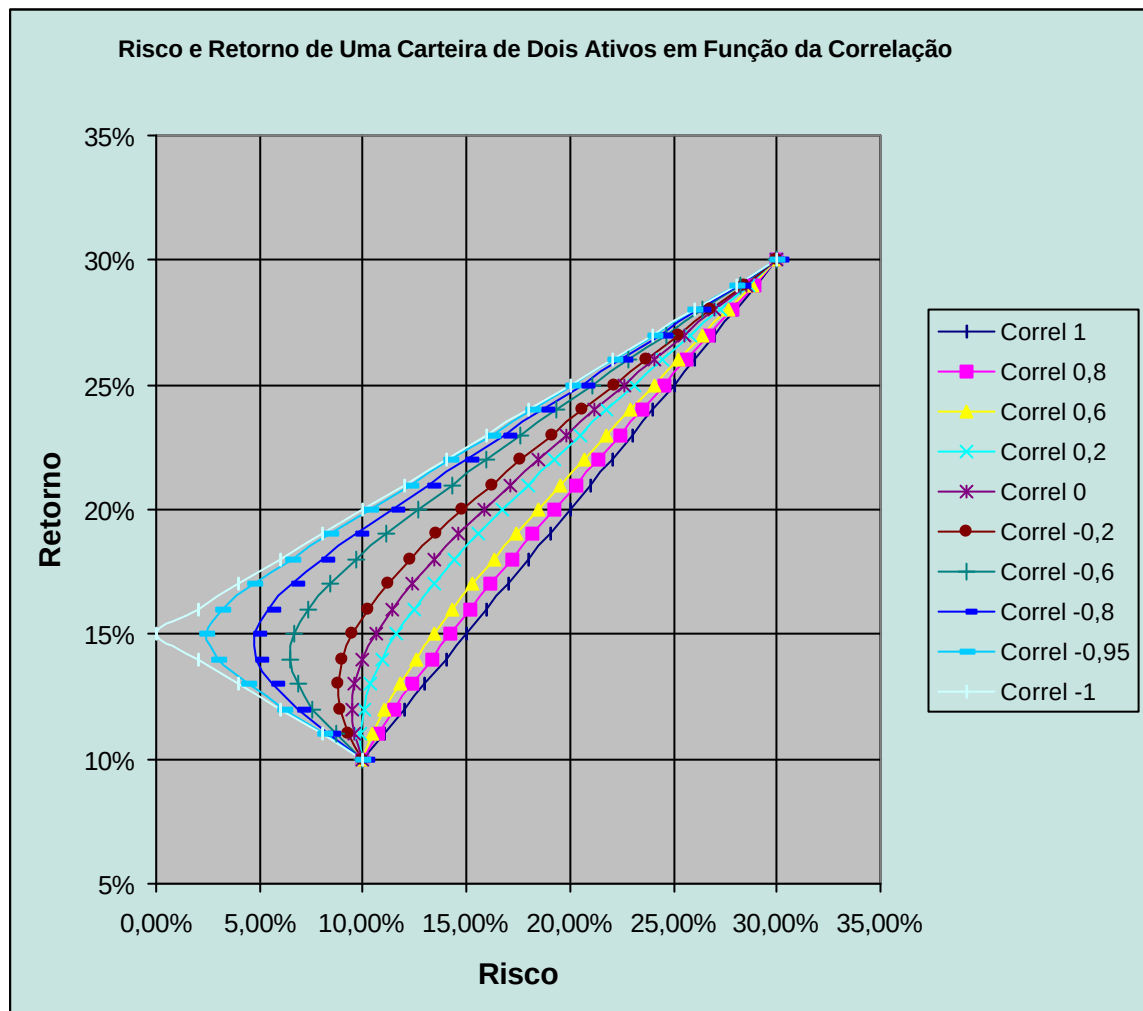


Figura 01 – Risco e Retorno em Função da Correlação

Nota-se que quando a correlação entre os ativos é (1), não há melhora significativa na composição da carteira, o que é lógico pelo fato de se diversificar o investimento em ativos que reagem da mesma maneira as notícias do mercado. Já quando se tem uma correlação perfeitamente negativa (-1) pode-se reduzir o risco à zero, mantendo um retorno esperado de 15%. Infelizmente não existem ativos com correlação perfeitamente negativa no mercado financeiro.

5- FORMULAÇÃO DE UM PROBLEMA DE PESQUISA OPERACIONAL

Para se resolver um problema de Pesquisa Operacional utilizando a programação Linear, é aconselhável que se siga uma metodologia como a proposta por Wayne (1995):

1. Definição das **variáveis de decisão**: são as incógnitas que devem ser determinadas na solução do problema.

2. Definição das **limitações ou restrições**: servem para considerar as limitações físicas do sistema, o modelo deve incluir restrições que limitam os valores possíveis das variáveis de decisão. Normalmente são expressas em forma de equações matemáticas.
3. Definição da **função objetivo (FO)**: é uma função que define a medida de efetividade do sistema como uma função matemática de suas variáveis de decisão.

Além de se seguir esses passos, a literatura ainda recomenda que antes da construção de um modelo matemático deve-se responder a 4 perguntas:

1. Qual é a medida de efetividade do objetivo? Como será expressa a solução do problema.
2. Quais são os fatores sob controle (variáveis controladas)?
3. Quais são os fatores não controlados?
4. Quais são as relações entre estes fatores e os objetivos?

Após formulado o modelo, pode-se partir para a otimização, que significa maximizar ou minimizar a função objetivo, variando-se as variáveis de decisão.

6- APLICAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO LINEAR NA SELEÇÃO DE CARTEIRAS

Harry Markowitz (1952) quando escreveu seu artigo *Portfolio Selection* era um estudante de pós-graduação em pesquisa operacional da Universidade de Chicago. Esse fato mostra que já há algum tempo tem-se estudado a aplicação da PO na seleção de carteiras. O que ainda esta faltando nos dias de hoje, principalmente no Brasil, é um intermediador entre os conceitos e a prática. Os pequenos investidores muitas vezes tomam decisões sem a aplicação de nenhum conceito sobre mercado de capitais. Desse modo, será apresentado abaixo um exemplo de aplicação da PL na seleção de carteiras, será utilizado o modelo de Markowitz e a formulação será feita na planilha Excel, possibilitando que mesmo os investidores que pouco conhecem sobre essas teorias possam aplica-las sem grandes dificuldades.

Exemplo de aplicação:

Um investidor deseja compor uma carteira de ações com base em cinco ativos diferentes. Utilizando o método de Markowitz, qual é a melhor combinação de ações que minimiza o risco de acordo com um retorno desejado?

As variáveis de decisão deste exemplo são:

- Participações individuais, X_i
- Retorno da carteira, E
- Risco da carteira, V
- Retorno individual de cada ativo, μ_i
- Variâncias e Covariâncias, σ_{ij}

Deseja-se saber qual deverá ser a porcentagem de investimento em cada ativo (X_i) a fim de reduzir o risco. A função objetivo, neste exemplo, é a de minimizar o risco ou a

variância dada pelo modelo de Markowitz. O modelo de Markowitz apresentado anteriormente revela quais são as restrições que devem ser respeitadas na solução deste problema. Ou seja:

$$\begin{aligned} \text{Participações individuais (} X_i \text{) } &\geq 0 & (06) \\ \text{Soma das participações individuais} &= 100\% & (07) \end{aligned}$$

Para que se possa resolver esse problema, deve-se determinar qual é a taxa de retorno mínima desejada, adota-se que seja de 9%, então:

$$\text{Retorno da carteira (} E \text{) } \geq 0,09 \quad (08)$$

Como foi dito no item anterior, quatro perguntas devem ser respondidas antes de se iniciar a solução do problema de PO. Deste modo, as respostas para as perguntas devem ser:

1. A medida de efetividade do objetivo será feita através da variância da carteira em porcentagem.
2. As variáveis controladas são: Retorno da carteira, Risco ou Variância da carteira e as Participações individuais.
3. Os fatores não controlados são: Retornos individuais, Variâncias e Covariâncias.
4. As relações entre estes fatores e o objetivo são dadas pelo modelo de Markowitz.

Neste exemplo será necessário calcular as variâncias, covariâncias e o retorno esperado a partir de uma matriz de retornos históricos de cada ativo. A planilha EXCEL possui três fórmulas conhecidas como [MÉDIA, VARP e COVAR] estas funções serão utilizadas para calcular respectivamente [Retorno médio, Variância e Covariância dos pares de ações].

HISTÓRICO DE RETORNOS DOS ATIVOS					
	Ativo 1	Ativo 2	Ativo 3	Ativo 4	Ativo 5
Período 1	10,00%	15,00%	12,00%	18,00%	5,00%
Período 2	12,00%	17,00%	13,00%	16,00%	8,00%
Período 3	8,00%	4,00%	9,00%	3,00%	10,00%
Período 4	7,00%	-8,00%	7,00%	4,00%	9,00%
Período 5	9,00%	15,00%	9,00%	8,00%	5,00%
Período 6	7,00%	22,00%	11,00%	10,00%	4,00%
Período 7	8,00%	3,00%	9,00%	-3,00%	4,00%
Período 8	6,00%	-14,00%	6,00%	15,00%	6,00%
Período 9	9,00%	2,00%	8,00%	20,00%	8,00%
Período 10	11,00%	15,00%	10,00%	16,00%	10,00%

Tabela (01) – Dados iniciais

	Ativo 1	Ativo 2	Ativo 3	Ativo 4	Ativo 5	TOTAL
Carteira %	20,00%	20,00%	20,00%	20,00%	20,00%	100,00%
Retorno Esperado	8,70%	7,10%	9,40%	10,70%	6,90%	

Tabela (02) – Composição da Carteira

GONCALVES Jr, CLEBER; PAMPLONA, EDSON DE O.; MONTEVECHI, JOSÉ A. Seleção de Carteiras Através do Modelo de Markowitz para Pequenos Investidores (Com o Uso de Planilhas Eletrônicas). IX Simpósio outubro de 2002, Bauru, SP.

A tabela 2 mostra uma composição de ativos que ainda não foi otimizada. A partir desses dados iniciais, será feita a otimização para se encontrar a carteira ótima.

Há a necessidade de se calcular as variâncias e covariâncias entre os pares de ativos que poderão compor a carteira. Isso pode ser feito através da utilização das fórmulas (VARP e COVAR) do MS Excel. Cada ativo contribui com a variância da carteira segundo a equação 4 do modelo de Markowitz acima. Através do Excel, pode-se calcular a variância da carteira utilizando-se a seguinte fórmula:

$$VAR = \sum_{i=1}^5 X_i * (\sum_{j=1}^5 X_j * s_{ij}) \quad (09)$$

Onde:

X_i : Participação de cada ativo;

s_{ij} : Covariância entre o par de ativos se (i) diferente (j) e variância se (i) igual a (j);

Através do MS Excel, pode-se calcular o resultado desta fórmula com a função (SOMARPRODUTO).

MATRIZ DE COVARIÂNCIAS					
	Ativo 1	Ativo 2	Ativo 3	Ativo 4	Ativo 5
Ativo 1	0,03%	0,12%	0,03%	0,06%	0,01%
Ativo 2	0,12%	1,23%	0,20%	0,16%	-0,05%
Ativo 3	0,03%	0,20%	0,04%	0,04%	-0,01%
Ativo 4	0,06%	0,16%	0,04%	0,51%	0,02%
Ativo 5	0,01%	-0,05%	-0,01%	0,02%	0,05%
Variância	0,01%	0,07%	0,01%	0,03%	0,00%
Retorno	1,74%	1,42%	1,88%	2,14%	1,38%

Tabela (03) – Matriz de Covariâncias

Variância	0,12%
Desvio Padrão	3,49%
Retorno Esperado	8,56%

Tabela (04) – Resultados

A tabela 4 mostra os resultados de retorno esperado e risco (variância) para a carteira com a composição da tabela 2. A tabela 3 mostra o quanto que cada ativo contribui com a variância e com o retorno, o que pode ser observado nas duas últimas linhas da tabela.

O objetivo é minimizar a variância mantendo um retorno esperado de no mínimo 9,00%. A ferramenta (SOLVER) do Excel pode auxiliar nesse processo. A instalação do (SOLVER) no Excel deve ser feita através do menu (Ferramentas, Suplementos). Após ativa-lo pode-se programa-lo para resolver o problema de seleção de carteira aqui apresentado. Abaixo pode-se observar a tela do (SOLVER) no Excel.



Figura 02 – Tela do Solver

O campo (Definir célula de destino) mostra a posição do termo que será minimizado, no caso a variância. As células variáveis são as participações individuais de cada ativo na carteira total. As restrições são aquelas vistas anteriormente. Deve-se também prever que não deve haver valores negativos para as participações dos ativos, isso deve ser feito dentro do sub-menu (Opções).

Ao clicar no botão (Resolver) o resultado apresentado será o mostrado na tabela 05.

	Ativo 1	Ativo 2	Ativo 3	Ativo 4	Ativo 5	TOTAL
Carteira %	1,80%	0,00%	78,57%	2,72%	16,91%	100,00%
Retorno Esperado	8,70%	7,10%	9,40%	10,70%	6,90%	

Tabela (05) – Composição da Carteira Otimizada

Variância	0,03%
Desvio Padrão	1,70%
Retorno Esperado	9,00%

Tabela (06) – Resultados da Carteira Otimizada

Observe que conseguiu-se aumentar o retorno e reduzir o risco em relação a composição inicial da carteira. De acordo com o retorno mínimo desejado de 9% foi possível reduzir o risco ao nível de 0,03%.

A tabela 7 abaixo mostra o quanto cada ativo contribui com o risco e o retorno da carteira otimizada.

MATRIZ DE COVARIÂNCIAS					
	Ativo 1	Ativo 2	Ativo 3	Ativo 4	Ativo 5
Ativo 1	0,03%	0,12%	0,03%	0,06%	0,01%
Ativo 2	0,12%	1,23%	0,20%	0,16%	-0,05%
Ativo 3	0,03%	0,20%	0,04%	0,04%	-0,01%
Ativo 4	0,06%	0,16%	0,04%	0,51%	0,02%
Ativo 5	0,01%	-0,05%	-0,01%	0,02%	0,05%
Variância	0,00%	0,00%	0,03%	0,00%	0,00%
Retorno	0,16%	0,00%	7,39%	0,29%	1,17%

Tabela (07) – Matriz de Covariâncias da Carteira Otimizada

7- CONCLUSÕES

Como pôde ser observado no exemplo anterior, a aplicação da programação linear na seleção de carteiras pode ser realizada de maneira relativamente fácil. Com a utilização de planilha eletrônica ou algum outro software com recursos de otimização, o resultado para uma carteira otimizada é rapidamente encontrado. Observe na tabela 5 que a carteira otimizada possui uma composição que seria quase impossível de se obter apenas através de observação ou da experiência. As técnicas de otimização podem prover um auxílio importante no momento de se decidir pela diversificação de um investimento. A literatura fala constantemente sobre as vantagens da diversificação para a redução do risco, aqui essa vantagem foi mostrada através de um exemplo prático. A utilização da planilha eletrônica facilitou o trabalho de programação e cálculo da carteira ótima, possibilitando que mesmo os investidores com poucos conhecimentos do mercado de capitais possam selecionar carteiras que atendam suas exigências.

Deve-se lembrar que o mercado financeiro atual é imensamente mais complexo que o exemplo apresentado aqui, quando se pretende diversificar um investimento utilizando opções, obrigações, câmbio entre outros, a otimização se torna mais complexa, em alguns casos inviabilizando o uso da programação linear através do método de Média e Variância de Markowitz.

8- BIBLIOGRAFIA

- Bernstein, Peter L. *Desafio aos Deuses: A Fascinante História do Risco*. Editora Campus, 2ª Edição, 1997.
- Bodie, Zvi. Merton, Robert C. *Finanças*. Editora Bookman, 1ª Edição, 1999
- Damodaran, A. *Investment Valuation: tools and techniques for determining the value of any asset*. New York, Editora Wiley, 1996.
- Markowitz, Harry. "Portfolio Selection." *Journal of Finance* (USA) 7 (March 1952): 77-91.
- Sharpe, William F. "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk." *The Journal of Finance* (New York) Vol XIX, 3 (September 1964): 425-442.
- Wayne L. *Introduction to Mathematical Programming - Applications and Algorithms*. Winston Duxbury Press. 1995.
- Weston, J. Fred. Brigham, Eugene, F. *Fundamentos da Administração Financeira*. Editora Makron, 10ª Edição, 2000.